ملاحظة: المبرهنة السابقة لا يمكن استخدامها في حال كانت المعادلة التفاضلية الخطية المعطاة غير متجانسة.
كما لا يمكن استخدامها في حال كانت المعادلة التفاضلية المعطاة غير خطية والأمثلة الآتية توضح صحة هذه الملاحظة.

1) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية: $y'' - y = 1$

إن كل من $y_1 = e^x - 1$ و $y_2 = e^{-x} - 1$ هو حل لهذه المعادلة.

- $y_1 = e^x - 1 \Leftarrow y_1' = e^x \longleftarrow y_1'' = e^x$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنه: $e^x - (e^x - 1) = 1 \Rightarrow e^x - e^x + 1 = 1$
$\Rightarrow 1 = 1$ أي أن y_1 حل

- $y_2 = e^{-x} - 1 \Leftarrow y_2' = -e^{-x} \longleftarrow y_2'' = e^{-x}$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنه $e^{-x} - (e^{-x} - 1) = 1$
أي أن y_2 أيضاً حل للمعادلة $\Rightarrow e^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$

- بينما $y_3 = y_1 + y_2 \Leftarrow$
$y_3 = e^x - 1 + e^{-x} - 1 = e^x + e^{-x} - 2$ ليست حلاً لأنه:
$y_3' = e^x - e^{-x} \longleftarrow y_3'' = e^x + e^{-x}$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنه:
$e^x + e^{-x} - (e^x + e^{-x} - 2) = 1$
$2 = 1$ غير ممكن

2) لتكن لدينا المعادلة $yy'' - x \cdot y' = 0$

إن الدالتين: $y_1 = 1$ و $y_2 = x^2$ كل منهما حل لهذه المعادلة:

- $y_1 = 1 \longrightarrow y_1'' = y_1' = 0$

نعوض بالمعادلة المعطاة فنجد أنه: $0 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
إذاً y_1 هو حل للمعادلة.

- $y_2 = x^2 \longrightarrow y_2' = 2x \longrightarrow y_2'' = 2$

. نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أن : $x^2(2) - x(2x) = 0 \Rightarrow$

. إذاً y_2 هو حل للمعادلة : $2x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Leftarrow$

- نلاحظ أن الدالة $y_3 = y_1 + y_2 \longrightarrow y_3 = x^2 - 1$

$y_3' = 2x \longrightarrow y_3'' = 2$

نعوض بالمعادلة المعطاة :

$(x^2 - 1)(2) - x(2x) = 0$

غير ممكن $2x^2 - 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow -2 = 0$

. أي ان الدالة $y_3 = y_1 + y_2$ ليست حلاً

. تعريف الحل العام : ليكن لدينا المعادلة التفاضلية $L(y) = f(x)$ بحيث أن L مؤثر تفاضلي من الرتبة n الحل العام لهذه المعادلة هو ذلك الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية .

مثال : إذا كان لدينا المعادلة . $y'' - y = 1$

إن الدالة : تشكل حل عام $y = A_1 e^x + A_2 e^{-x} - 1$ لأنها تحقق المعادلة التفاضلية وتحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية وأي حل ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت الكيفية قيم عددية معينة ندعوه حلاً خاصاً .

مبرهنة "دون برهان" :

. لكل معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة n من الشكل $L(y) = 0$ يوجد n حلاً مستقلاً وإذا كانت هذه الحلول هي $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ فعندئذ الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالشكل :

$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$ حل عام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

ونكتبه : $y_h = \sum_{j=1}^{n} A_j y_j$

SUBJECT:

ملاحظات حول المبرهنة:

1- الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هو الحل العام الوحيد (لا يوجد سواه) طالما تحققت مبرهنة الوجود والوحدانية.

2- أي حل نحصل عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت العددية قيم عددية معينة ندعوه حلاً خاصاً لهذه المعادلة.

3- مجموعة الحلول $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ ندعوها المنظومة الأساسية «قاعدة الحلول» للمعادلة التفاضلية.

4- قد يكون لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة أكثر من قاعدة حلول واحدة وإذا ما تم استخدام هذه القواعد عندئذٍ فيكون لدينا أكثر من حل عام واحد وهذا يناقض الملاحظة الأولى ونقول بأنه لا يوجد تناقض لأن الحل العام وحيد طالما تحققت شروط مبرهنة الوجود والوحدانية وعندئذٍ يمكن رد أي من القاعدتين إلى القاعدة الأخرى كما في الأمثلة الآتية:

مثال$_1$: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $y''-4y=0$

إن الدالتين $y_1=e^{2x}$ و $y_2=e^{-2x}$ هما قاعدة الحلول للمعادلة المعطاة لنثبت أن y_1 و y_2 هما قاعدة الحلول.

1- لنثبت أن كل دالة هي حل للمعادلة المعطاة

$$y_1=e^{2x}\longrightarrow y_1'=2e^{2x}\longrightarrow y_1''=4e^{2x}$$

$$4e^{2x}-4e^{2x}=0\Rightarrow 0=0$$ y_1 هي حل

$$y_2=e^{-2x}\longrightarrow y_2'=-2e^{-2x}\longrightarrow y_2''=4e^{-2x}$$

y_2 هي حل

2- نلاحظ أن عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة ويساوي 2.

3- لنثبت أن الدوال مستقلة خطياً أي $A_1.y_1+A_2.y_2=0 \Leftarrow A_1=A_2=0$

$$① \quad A_1.e^{2x}+A_2.e^{-2x}=0 \Rightarrow 2A_1e^{2x}-2A_2.e^{-2x}=0 \quad ②$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 2 ونجمعها

$$4A_1.e^{2x}=0\Rightarrow A_1=0$$

نعوض A_1 بإحدى المعادلتين نجد أن $0+A_2.e^{-2x}=0\Rightarrow A_2=0$

$$A_1=A_2=0$$

أي أن الدوال مستقلة وبالتالي فإن الحل العام :

$$y_h = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}$$

بحيث أن c_1 و c_2 ثوابت كيفية

مثال₂: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية : $y''' + 9y' = 0$

إن الدوال $y_3 = \sin 3x$ ، $y_2 = \cos 3x$ ، $y_1 = 1$ تشكل قاعدة الحلول.

ج/ن :
1) كل دالة من هذه الدوال هي حل .
2) عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة .
3) علينا أن نثبت بأن هذه الدوال مستقلة خطياً أي أن تحقق العلاقة :

$$A_1 y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 0 \longrightarrow A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

$$A_1 + A_2 \cdot \cos 3x + A_3 \cdot \sin 3x = 0 \quad \text{---} (1)$$

بالاشتقاق ← $$-3A_2 \cdot \sin 3x + 3A_3 \cdot \cos 3x = 0 \quad \text{---} (2)$$

بالاشتقاق ← $$-9A_2 \cdot \cos 3x + 9A_3 \cdot \sin 3x = 0 \quad \text{---} (3)$$

يكون لجملة المعادلتين حل وحيد إذا وفقط إذا كان محدد الأمثال لا يساوي الصفر

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3\sin 3x & 3\cos 3x \\ -9\cos 3x & -9\sin 3x \end{vmatrix} = 27\sin^2 3x + 27 \cdot \cos^2 3x$$

$$= 27 \neq 0$$

وبما أن المعادلتين متجانستين فإن الحل الوحيد هو الحل الصفري أي أن

$$A_2 = A_3 = 0$$

نعوض بـ (1) $$A_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

ومنه فإن $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ أي أن الدوال مستقلة خطياً

وبالتالي فإن الحل العام يكون من الشكل :

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 \cdot y_3$$

بحيث أن c_1, c_2, c_3 هي ثوابت كيفية أي أن :

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2 \cdot \cos 3x + c_3 \sin 3x}$$

★ كما أن الدوال $y_3 = e^{-3ix}$ ، $y_2 = e^{3ix}$ ، $y_1 = 1$ تمثل أيضاً قاعدة حلول للمعادلة المعطاة.

-

لنثبت أن $y_2 = e^{3ix}$ هو حل للمعادلة

نشتق $y_2' = 3ie^{i3x} \longrightarrow y_2'' = -9e^{i3x} \longrightarrow y_2''' = -27ie^{i3x}$

نعوضها بالمعادلة :

$$-27ie^{3x} + 27ie^{3x} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

بنفس الطريقة نثبت أن y_3 هو حل للمعادلة.

- عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة ويساوي 3.

- يمكن أن نثبت أن هذه الدوال مستقلة خطياً

ومنه فإن الحل العام يكتب بالصورة $y_h = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot e^{3ix} + \beta_3 \cdot e^{-3ix}$

نلاحظ أنه يوجد لدينا حلين عامين مختلفين من حيث الشكل والصورة مع العلم أن شروط مبرهنة الوجود والوحدانية متوفرة في المعادلة التفاضلية المعطاة.

« دوال المعاملات مستمرة » لذلك بناءً على الملاحظة [4] يمكن رد أحد الشكلين للآخر كما يلي: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ صيغة أولر

$$y_h = B_1 + \beta_2 (\cos 3x + i\sin 3x) + B_3 (\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$y_h = B_1 + (\beta_2 + \beta_3)\cos 3x + (i\beta_2 + i\beta_3)\cdot \sin 3x$$

$$y_h = c_1 + c_2 \cdot \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

محدد فرونسكي :

ليكن لدينا مجموعة الدوال $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ المعرفة والمستمرة على المجال I إن محدد فرونسكي لهذه الدوال هو بالتعريف المحدد التالي :

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

★ وإن قيمة محدد فرونسكي قد تكون دالة تتعلق بالمتغير المستقل x .

مثال: إذا كانت لدينا الدوال $\{x, x^2, x^3\}$

$$W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} + x^3 \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

★ إن قيمة محدد فرونسكي قد يكون ثابتاً عددياً . مغايراً للصفر.

مثال:

إذا كانت لدينا الدوال $\{e^x, e^{-x}\}$

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = -2$$

★ قد يكون قيمة محدد فرونسكي صفراً

مثال: إذا كانت لدينا الدوال $\{2x, 6x\}$

$$W(2x, 6x) = \begin{vmatrix} 2x & 6x \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12x - 12x = 0$$

مبرهنة : إذا كانت الدوال $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ مرتبطة خطياً وعندئذٍ قيمة محدد فرونسكي تكون معدومة أي تساوي الصفر.

الإثبات:

لنفرض أن $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ مرتبطة خطياً

بما أن هذه المجموعة مرتبطة خطياً عندئذٍ $A_1 . y_1 + A_2 . y_2 + \cdots + A_n . y_n = 0$

$$y_n = -\beta y_1 - \beta_2 y_2 - \cdots - \beta_{n-1} y_{n-1}$$

نشتق هذه العلاقة $(n-1)$ مرة متتالية فنجد أن:

$$y'_n = -\beta_1 \cdot y'_1 - \beta_2 \cdot y'_2 - \text{———} - \beta_{n-1} \cdot y'_{n-1}$$
$$y''_n = -\beta_1 \cdot y''_1 - \beta_2 \cdot y''_2 \text{———} - \beta_{n-1} \cdot y''_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$y_n^{n-1} = -\beta_1 \cdot y_1^{(n-1)} - \beta_2 \cdot y_2^{(n-1)} \text{———} - \beta_{n-1} \cdot y_{n-1}^{n-1}$$

ونعلم أن محدد فرونسكي للدوال $\{y_j\}_{j=1}^n$ هو

$$W(y_1, y_2 \text{———}, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \text{———} & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \text{———} & y'_n \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \text{———} & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

نضرب جميع عناصر العمود الأول بـ β_1 ونضيفها إلى عناصر العمود الأخير

$$\begin{vmatrix} \beta_1 y_1 + y_n & \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + y_n & 0 \\ \beta_2 y'_1 + y'_n & \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 + y'_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_n y_1^{n-1} + y_n^{n-1} & \beta_n y_{n-1}^{n-1} + \beta_n y_{n-1}^{n-1} + y_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

نضرب جميع عناصر العمود الثاني بـ β_2 ونضيفه إلى عناصر العمود الأخير .

وهكذا نستمر حتى العمود $(n-1)$ نضرب جميع عناصره بـ β_{n-1} ونضيفه إلى عناصر العمود

الأخير فنحصل على محدد جميع عناصر ~~الأعمدة~~ العمود الأخير أصفار .

* ونعلم بأنه جميع عناصر أحد الأعمدة أو أحد الأسطر يساوي الصفر فإن قيمة المحدد 0 .

تساوي الصفر.

ملاحظة :
عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $L(y)=0$ من الرتبة n متجانسة ولتكن $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ حلول

للمعادلة التفاضلية $L(y)=0$ إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون هذه الحلول

مستقلة هو أن يكون قيمة محدد فرونسكي لا يساوي الصفر.

الإثبات: لنفرض بأن الحلول مستقلة ولنثبت أن $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$

بما أن $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ هذا يعني أن:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n = 0 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$$

لنشتق هذه المعادلة $(n-1)$ مرة متتالية فنجد أن:

$$\left.\begin{aligned} A_1 y_1' + A_2 y_2' + \ldots + A_n y_n' &= 0 \\ A_1 y_1'' + A_2 y_2'' + \ldots + A_n y_n'' &= 0 \\ &\;\vdots \\ A_1 y_1^{n-1} + A_2 y_2^{n-1} + \ldots + A_n y_n^{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{——} \quad (2)$$

إن 1 و 2 تشكل جملة n معادلة خطية إذا اعتبرنا أن المجاهيل هي $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ؛ يكون لجملة هاتين المعادلتين حلا وحيد هو الحل الصفري إذا وفقط إذا كان محدد الأمثال لا يساوي الصفر

$$\text{محدد الأمثال} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

لكن المحدد الموجود في الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة هو محدد فرونسكي أي أن

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$$

(⇐) **العكس:** لنفرض بأن قيمة محدد فرونسكي لهذه الحلول لا يساوي الصفر ولنثبت أنها مستقلة بما

أن $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ (فرضاً) ⇐

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

SUBJECT:

أي ان الجملة المعادلتين 1 و 2 حل وحيد هو الحل الصفري.
تتحقق العلاقة 1 من أجل ثوابت جميعها أصفار يعني بأن الدوال مستقلة خطياً.

مرتبطة ← محدوده

حلول هي ← الحلول مستقلة إذا كان المحدد $\neq 0$

مرتبطة " " " $= 0$

مثال 1 لتكن لدينا مجموعة الدوال $y_1 = x^3$ $y_2 = |x^3|$

$y_1 = x^3$

$$y_2 = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

1- $A_1 . y_1 + A_2 . y_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$

2- $A_1 x^3 + A_2 x^3 = 0 \quad ; x \geq 0$

3- $A_1 x^3 + A_2 x^3 = 0 \quad ; x < 0$

ونلاحظ بأن المعادلتين الأخيرتين 2 و 3 تتحققان بآن واحد إلا إذا كان $A_1 = A_2 = 0$ أي
أن الدوال مستقلة لنحسب قيمة محدد ورونسكي:

$$W(y_1, y_1)_{x \geq 0} = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$W(y_1, y_2)_{x < 0} = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$$
